Übungsklausur Exponentialfunktion (Schneeschuhhasen)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme die erste Ableitung der Funktion $g(x) = x \cdot e^{x^2}$
und vereinfache so weit wie möglich. (2VP)

2) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 + e^{2x+1}$.
Bestimme die Stammfunktion F von f mit $F(0) = e$. (3VP)

3) Löse die Gleichung $\left(x^2 - 4\right) \cdot \left(e^{2x} - 1\right) = 0$. (3VP)

4) Berechne das Integral $\int_0^1 (2e^{2x} + 1)dx$. (3VP)

5) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5(x-1) \cdot e^{-x}$.
   a) Bestimme die Nullstelle von f(x).
   b) Die vier Abbildungen zeigen die Graphen der Funktion f, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f sowie der Funktion g mit $g(x) = f(x - b)$.
   Ordne die Funktionen den Abbildungen zu und begründe jeweils deine Entscheidung.
   c) Gib den Wert von b an.

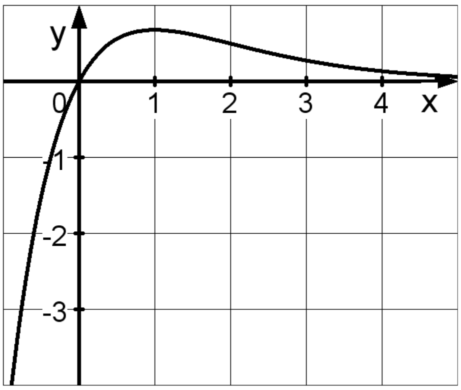

Abb.1

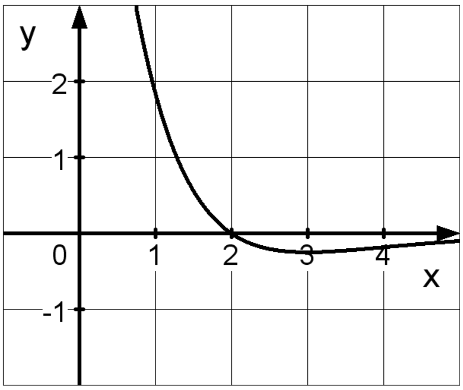

Abb.2

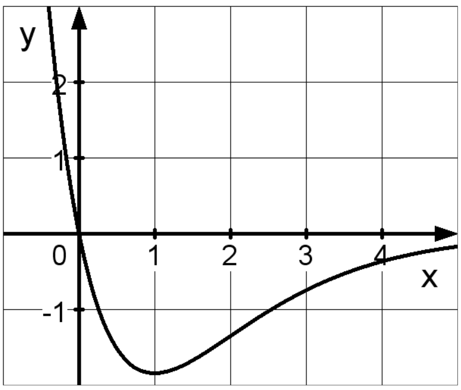

Abb.3

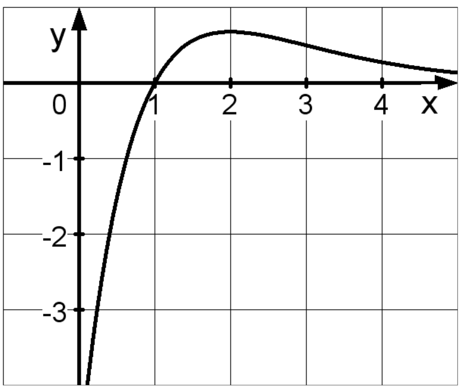

Abb.4

(4VP)

Übungsklausur Exponentialfunktion (Schneeschuhhasen)
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Im Jahre 1880 wurden Schneeschuhhasen in Neufundland ausgesetzt. Die Anzahl der Hasen konnte in den folgenden Jahren zunächst näherungsweise durch einen Funktionsterm der Form

$$f(t) = 50 \cdot e^{0{,}1 \cdot t} \quad \text{(t in Jahren nach 1880)}$$

beschrieben werden.

a) (1) Wie viele Hasen wurden 1880 ausgesetzt?
(2) Wie viele Hasen gab es nach 10 Jahren?
(3) Wann hat sich die Anzahl der Hasen verdoppelt?
(4) Wie müsste k in $\tilde{f}(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t}$ angepasst werden, um eine andere Hasenpopulation zu beschreiben, deren Bestand nach 10 Jahren auf 100 Hasen angewachsen ist?

b) Nach 20 Jahren konnte das Wachstumsverhalten der Hasen nicht mehr gut durch $f(t)$ beschrieben werden. Ab diesem Zeitpunkt war aber die Funktion

$$g(t) = 900 - c \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 2} \quad \text{(t in Jahren nach 1880)}$$

Eine gute Näherung für die Anzahl der Hasen.

(1) Mit wie viel Hasen ist langfristig auf Neufundland zu rechnen?
(2) Nenne einen Grund für dieses veränderte Wachstumsverhalten.
(3) Zeige, dass die Anzahl der Hasen immer wächst, falls c > 0 ist.
(4) Wie groß ist die Zahl c, wenn $f(t)$ und $g(t)$ für t = 20 die gleiche Anzahl Hasen liefert?

c) Der Hasenbestand wird durch die Funktion g(t) beschrieben.
Formuliere eine Gleichung, mit der folgende Fragestellung gelöst werden kann:
„In welchem 10 Jahreszeitraum kommen 200 Hasen hinzu?“

Übungsklausur Exponentialfunktion (Schneeschuhhasen)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $f'(x) = e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot (2x) = e^{x^2}(1+2x^2)$ **2P**

2) $F(x) = 2x + \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$ (2P)

$F(0) = \frac{1}{2}e + c = e \Rightarrow c = \frac{1}{2}e$ (1P) **3P**

3) Entweder $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$ (1,5P)

oder $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x_3 = 0$ (1,5P) **3P**

4) $\int_0^1 \left(2e^{2x} + 1\right)dx = \left[e^{2x} + x\right]_0^1 = \left(e^2 + 1\right) - \left(e^0 + 0\right) = e^2$ **3P**

5) a) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (0,5P)

b) f(x) ist Abb. 4, da die Nullstelle bei x = 1 ist. (0,5P)

$f'(x)$ ist Abb. 2, da am Hochpunkt von f(x) bei x = 2 eine Nullstelle sein muss. (1P)

F(x) ist Abb. 3, da f(x) bei x = 1 eine Nullstelle mit VZW von - nach + hat und F hier einen Tiefpunkt hat. (1P)

g(x) ist Abb. 1, da das Schaubild nur in x-Richtung verschoben ist. (0,5P)

c) $b = -1$ (Verschiebung nach links) (0,5P) **4P**

Summe: 15 P

Übungsklausur Exponentialfunktion (Schneeschuhhasen)

Lösungen Wahlteil:

a) (1) f(0) = 50 Hasen

(2) $f(10) = 135{,}91 \Rightarrow 136$ Hasen

(3) $f(t) = 100 \Leftrightarrow 50 \cdot e^{0{,}1\cdot t} = 100 \Leftrightarrow e^{0{,}1\cdot t} = 2 \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0{,}1} \Rightarrow t = 6{,}93$

$\Rightarrow$ nach 6,93 Jahren

(4) $\tilde{f}(10) = 50e^{k\cdot 10} = 100 \Rightarrow e^{10k} = 2 \Rightarrow 10k = \ln(2) \Rightarrow k = \dfrac{\ln(2)}{10} \approx 0{,}069$

b) (1) Für $t \to \infty$ gilt $g(t) = 900 - c \cdot \underbrace{e^{-0{,}1\cdot t+2}}_{\to 0} \to 900 \Rightarrow$ Mit 900 Hasen

(2) Aufgrund beschränkter Ressourcen können die Hasen sich nicht ewig exponentiell vermehren.

(3) $f'(t) = 0{,}1 \cdot c \cdot e^{-0{,}1\cdot t+2} > 0$ für c > 0, da $e^{-0{,}1\cdot t+2}$ immer größer 0 ist.

(4) $g(20) = f(20) \Rightarrow 900 - c \cdot e^{-0{,}1\cdot 20+2} = 900 + c = 369{,}45 \Rightarrow$ c=530,55

c) $g(t+10) - g(t) = 200$